

749

215

Différentielle du déterminant

- AGCO, Rouvrière, p 83
- Algèbre, Landon, p 142

ROU On note $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\det : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$

83

600 Déf. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

742 Pour tout (i, j) on appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

La constante $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij} .

Prop. On a le développement par rapport à la i -ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

On a le développement par rapport à la j -ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Déf. Soit $A \in M_n(K)$. La matrice (A_{ij}) des cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A et est notée $\text{com}(A)$ ou $\tilde{A}$.

Prop. Soit $A \in M_n(K)$. Alors :

$$A \cdot \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

ROU Théorème. La fonction $\det$ est de classe C^1 sur

83

$M_n(\mathbb{R})$ et $d(\det)(I_n) = \text{Tr}$.

Preuve. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie).

Le déterminant est une fonction polynômiale

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|)$$

$$\text{Con}(A)^T = \det(A) A^{-1}$$

des coefficients de la matrice (cela se voit sans la formule avec les permutations), donc de classe C^1 (et même C^∞) sur $M_n(\mathbb{K})$.

Pour obtenir $d(\det)(I_n)$, il suffit de calculer la dérivée de $\det$ en I_n dans une direction quelconque $H \in M_n(\mathbb{K})$.

On prend par exemple H qui admet toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Alors les valeurs propres de $I + tH$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont les $1 + t\lambda_i$. D'où :

$$\begin{aligned} \det(I + tH) &= \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(t^2) \end{aligned}$$

$$= 1 + t \text{Tr}(H) + O(t^2) \quad \text{quand } t \rightarrow 0$$

Donc on a que

$$d(\det)(I_n)(H) = \text{Tr}(H)$$

(qui est bien linéaire continue car linéaire)

Prop : Pour tout $x, H \in M_n(\mathbb{R})$ on a :

$$d(\det)(x)(H) = \text{Tr}(\tilde{x}^T H)$$

où $\tilde{x}$ est la conjuguée de x .

Preuve : On suppose tout d'abord que x est inversible. On se ramène alors à I_n :

$$\begin{aligned} \det(x + H) &= \det(x) \det(I_n + x^{-1}H) \\ &= \det(x) (1 + \text{Tr}(x^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(x) + \text{Tr}(\det(x) x^{-1}H) + o(\|H\|) \\ &= \det(x) + \text{Tr}(\tilde{x}^T H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } d(\det)(x)(H) = \text{Tr}(\tilde{x}^T H)$$

On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$ (ouvert car $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et dense car les matrices inversibles sont denses dans $GL_n(\mathbb{R})$).

Comme $\det$ est de classe C^1 , l'application $X \mapsto d(\det)(X)$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi si $X \in M_n(\mathbb{R})$ avec $(X_k)_k$ suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ avec $X_k \rightarrow X$ on a :

$$d(\det)(X)^{(H)} = d(\det)\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X_k\right)^{(H)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} d(\det)(X_k)^{(H)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Tr}(\tilde{X}_k^T H)$$

$$= \text{Tr}(\tilde{X}^T H) \quad \text{car l'application } X \mapsto \tilde{X}$$

est continue car les cofacteurs sont des fonctions polynomiales des coefficients de X . De même, la trace et la transposition sont continues. On obtient bien la formule voulue.

Prop. Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}^n$ des solutions du système linéaire $\gamma' = A(t)\gamma$ où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est fonction continue de t .

Soit $w(t) = \det(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ le wronskien de cette famille.

$$\text{Alors : } w'(t) = \text{Tr}(A(t)) \cdot w(t)$$

$$\text{Ainsi : } \det(e^{tA}) = \exp(t \cdot \text{Tr}(A)).$$

Preuve : Soit Y la matrice formée des colonnes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (c'est une matrice fondamentale).

On observe que $Y' = A Y$. Par dérivation des

fonctions composées, on en déduit :

$$W' = \det(Y)' = d(\det)(Y)(Y') = T_n(\tilde{Y}^T \cdot Y')$$

Où :

$$\begin{aligned} T_n(\tilde{Y}^T Y') &= T_n(\tilde{Y}^T A Y) \\ &= T_n(\tilde{Y}^T Y A) \quad \text{car } T_n(AB) = T_n(BA) \\ &= T_n(\det(Y) \cdot I_n \cdot A) \\ &= \det(Y) \cdot T_n(A) \\ &= T_n(A) \cdot W \end{aligned}$$

Finalement : $W'(t) = T_n(A(t)) \cdot W(t)$

On résoud pour trouver :

$$W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t T_n(A(s)) ds\right) \cdot W(t_0)$$

Si A est indépendante de t , l'équation $Y' = AY$ admet la solution $Y = e^{tA}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \det(e^{tA}) &= \det(Y(t)) = W(t) \\ &= \exp\left(\int_0^t T_n(A) ds\right) \cdot W(0) \\ &= \exp(t \cdot T_n(A)) \end{aligned}$$